



POLITECNICO
MILANO 1863

La Freccia del Tempo

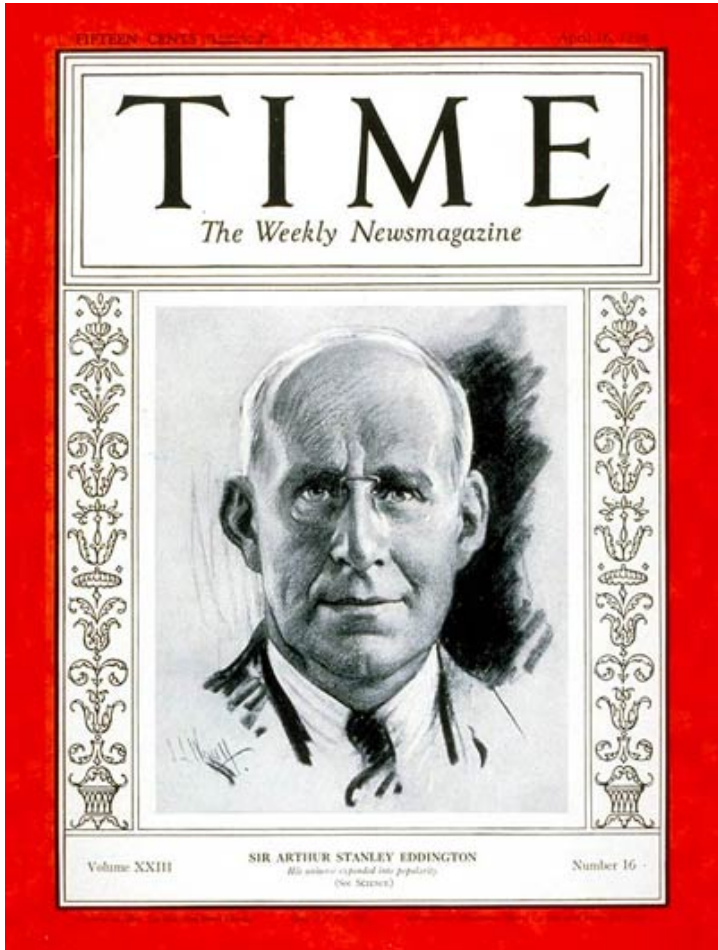
Giovanni Valente

Dipartimento di Matematica (DMAT)

a seguire...

- **Freccia del Tempo: definizione**
- **Problema filosofico: ai fondamenti della fisica**
- **Storia della fisica: termodinamica\meccanica statistica**
- **Ludwig Boltzmann fisico e filosofo: questioni aperte!**

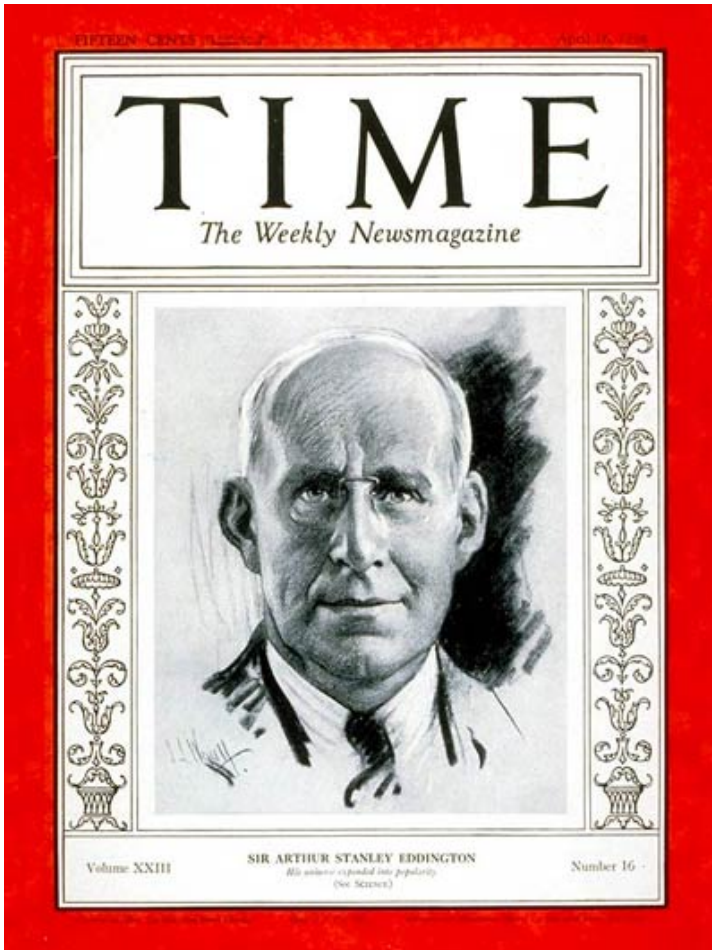
Sir Arthur Eddington (1882-1944)



L'astrofisico Arthur Eddington introdusse l'espressione
«**Freccia del Tempo**»
nel suo libro *The Nature of the Physical World* del 1928

- **Divenire** = Dinamicità, il tempo «passa»
→ Eraclito vs Parmenide in Spazio-Tempo 4-D
- **Verso** = Distinzione fra passato e futuro
→ **Irreversibilità Termodinamica**

Eddington (1928)



«*La Freccia del Tempo*. La cosa meravigliosa riguardo al tempo è che passa... Nel mondo quadri-dimensionale (...) gli eventi passati e futuri sono sparsi di fronte a noi in una mappa... Vediamo nella mappa la via dal passato al futuro, oppure dal futuro al passato; ma non c'è nessun cartello ad indicare che è un senso unico. Qualcosa deve essere aggiunto alle concezioni geometriche racchiuse nel mondo di Minkowski prima che diventi un'immagine completa del mondo che conosciamo». (p. 34)

Freccia del Tempo: Verso

Freccia del Tempo Psicologica

- Ricordi del passato, ma non del futuro
- Futuro incerto, ma passato determinato

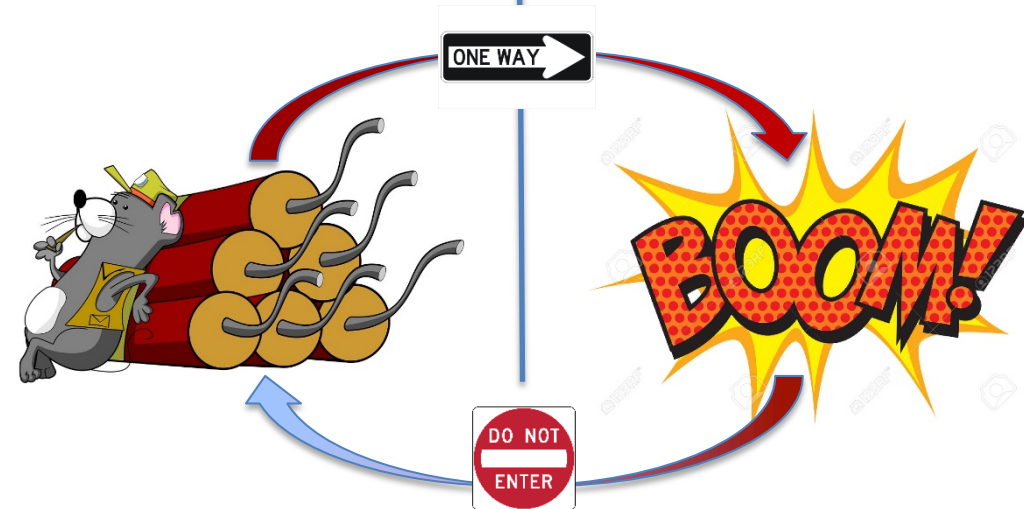
Freccia del Tempo Fisica

PROCESSI IRREVERSIBILI accadono in una direzione temporale, ma non nella direzione opposta

PASSATO



FUTURO



Verso del Tempo



ASIMMETRIA

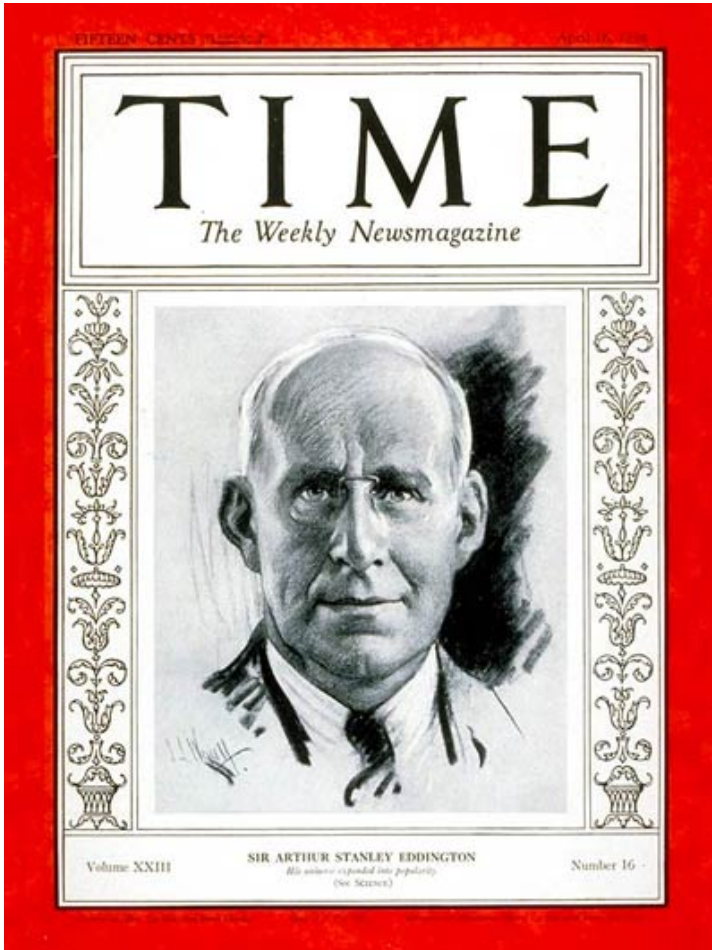
Distinzione fra i due versi: Passato\Futuro



ORIENTAZIONE

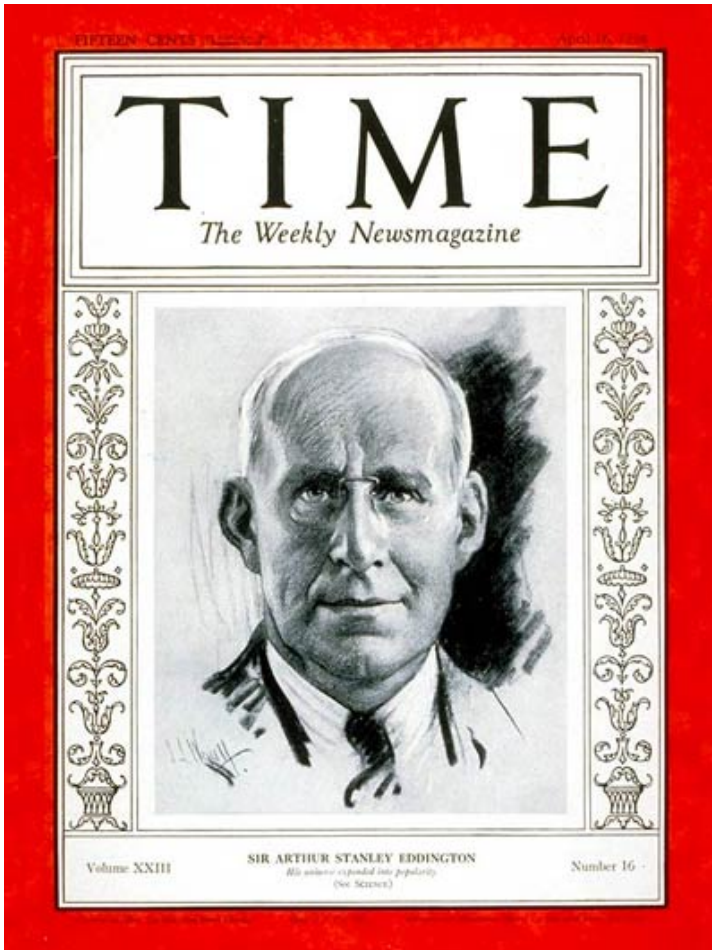
Passato → Futuro, e non Futuro → Passato

Eddington (1928): Tempo ed equilibrio



«In tale regione [di equilibrio termodinamico] perdiamo la freccia del tempo. Si ricordi che la freccia del tempo punta in direzione dell'aumento di un elemento casuale. Quando l'elemento casuale ha raggiunto il suo limite e diventa stazionario la freccia non sa da quale parte puntare... Il tempo è ancora là e mantiene le sue proprietà ordinarie, ma ha perso la sua freccia; come lo spazio si estende, ma non «passa» ». (p. 39)

Eddington (1928): Seconda Legge



«La legge che l'entropia aumenta sempre (...) occupa, io credo, la posizione suprema fra le leggi di Natura. Se (...) la vostra teoria dell'universo preferita è in disaccordo con le equazioni di Maxwell – allora tanto peggio per le equazioni di Maxwell. Se si trova che è contraddetta dalle osservazioni – beh, questi sperimentali fanno pasticci a volte. Ma se si scopre che la vostra teoria va contro la seconda legge della termodinamica non vi do alcuna possibilità; non c'è niente da fare se non collassare nella più profonda umiliazione». (p. 74-75)

Einstein: Termodinamica come teoria universale

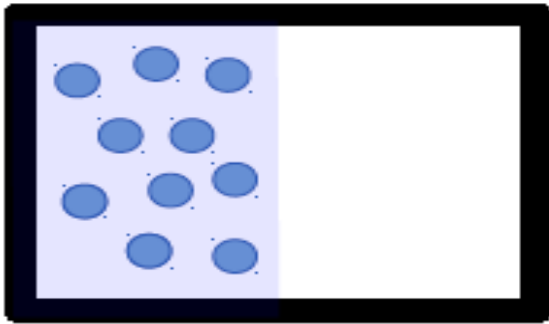


« [Una legge] colpisce tanto di più quanto maggiore è la semplicità delle sue premesse, più diversificate sono le cose che mette in relazione, e più esteso è il dominio di applicabilità. Da qui viene la profonda impressione che la termodinamica classica mi ha fatto. È la solo teoria fisica di contenuto universale che, ne sono convinto, non verrà mai sovvertita nell'ambito di applicabilità dei suoi concetti basilari».

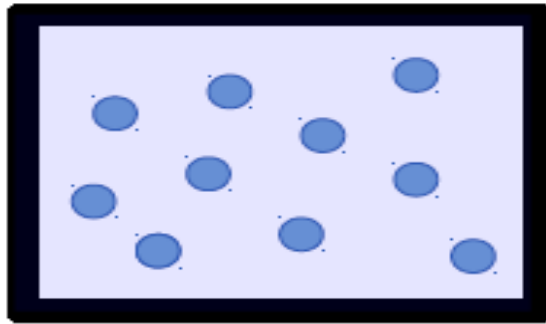
(Albert Einstein, citato da *Klein* 1967, p.509)

Irreversibilità Termodinamica

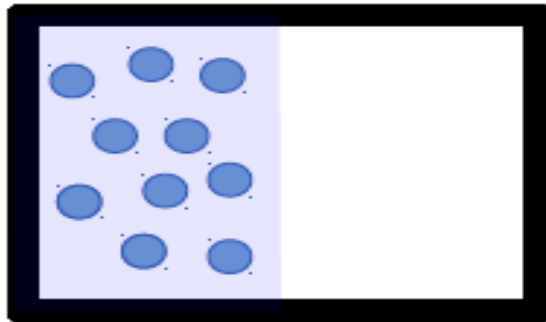
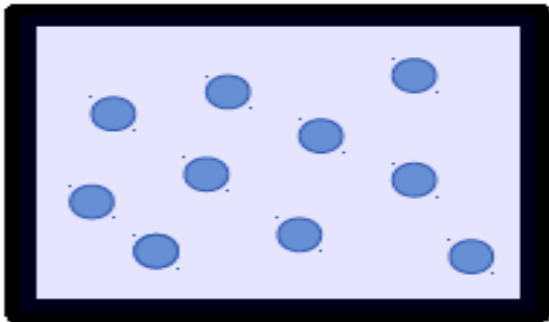
$t = 0$



$t > 0$



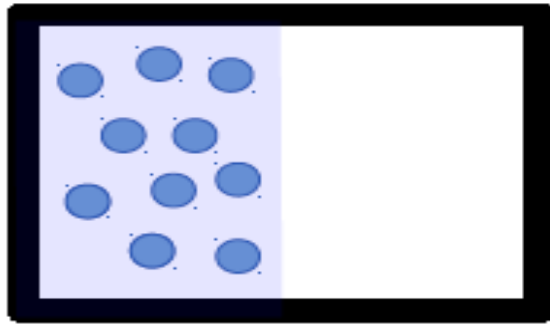
Espansione spontanea



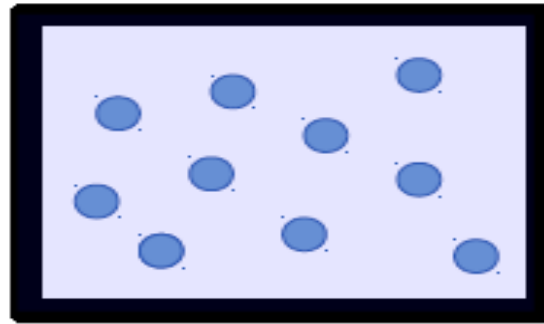
Contrazione spontanea

Irreversibilità Termodinamica: Fatti Empirici

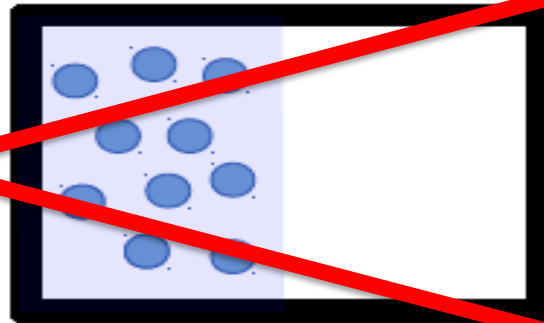
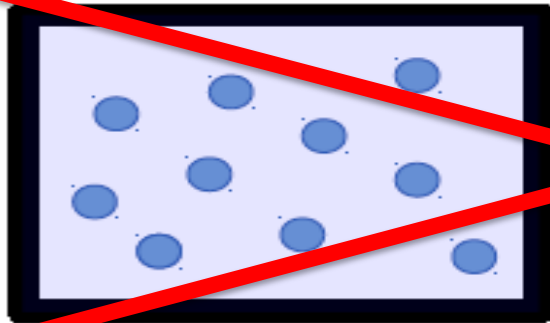
$t = 0$



$t > 0$



Espansione spontanea

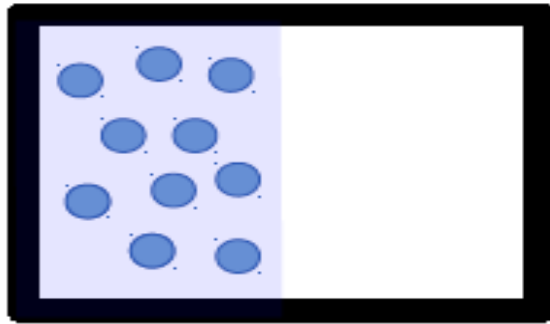


Contrazione spontanea

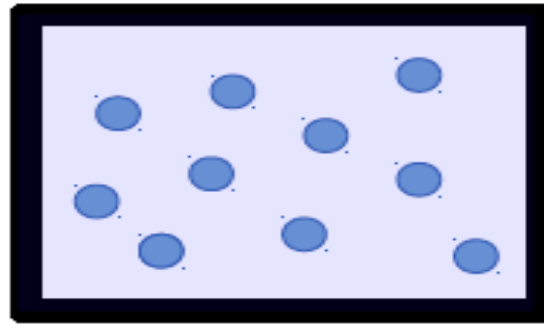
Non osservata!!!

Irreversibilità Termodinamica: Teoria

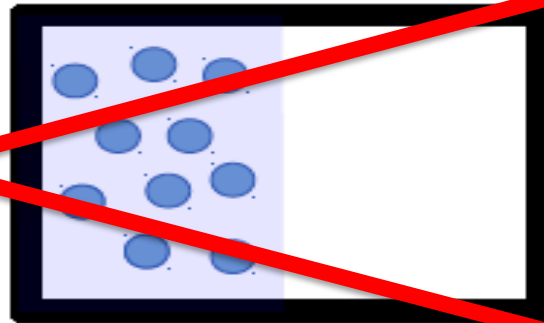
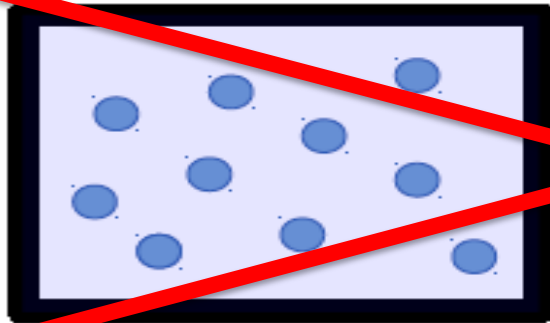
$t = 0$



$t > 0$



Aumento di entropia



Diminuzione di entropia

Impossibile!!!

Verso del Tempo



ASIMMETRIA

Distinzione fra i due versi: Passato\Futuro



ORIENTAZIONE

Passato → Futuro, e non Futuro → Passato

Programma Entropico



ASIMMETRIA

Distinzione fra i due versi: Passato\Futuro
Segno del *gradiente di entropia*



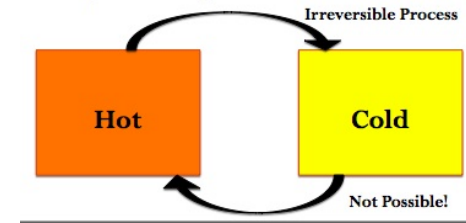
ORIENTAZIONE

Passato → Futuro, e non Futuro → Passato
Entropia aumenta, e non diminuisce

Programma Entropico: domande fondamentali

La Freccia del Tempo (Fisica) è determinata dall'**Irreversibilità Termodinamica**

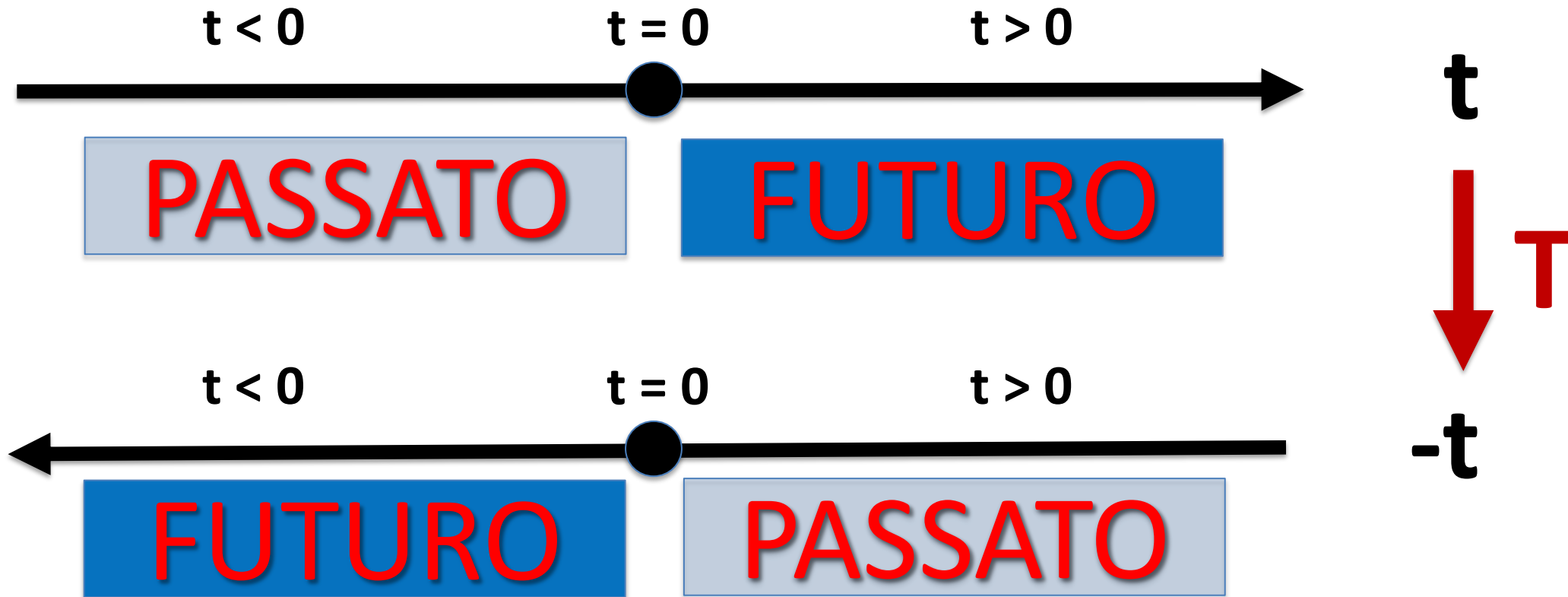
- Asimmetria osservata a livello macroscopico
- Aumento di entropia previsto dalla Seconda Legge punta verso il Futuro



1. Cosa determina la Freccia del Tempo a livello *microscopico*?

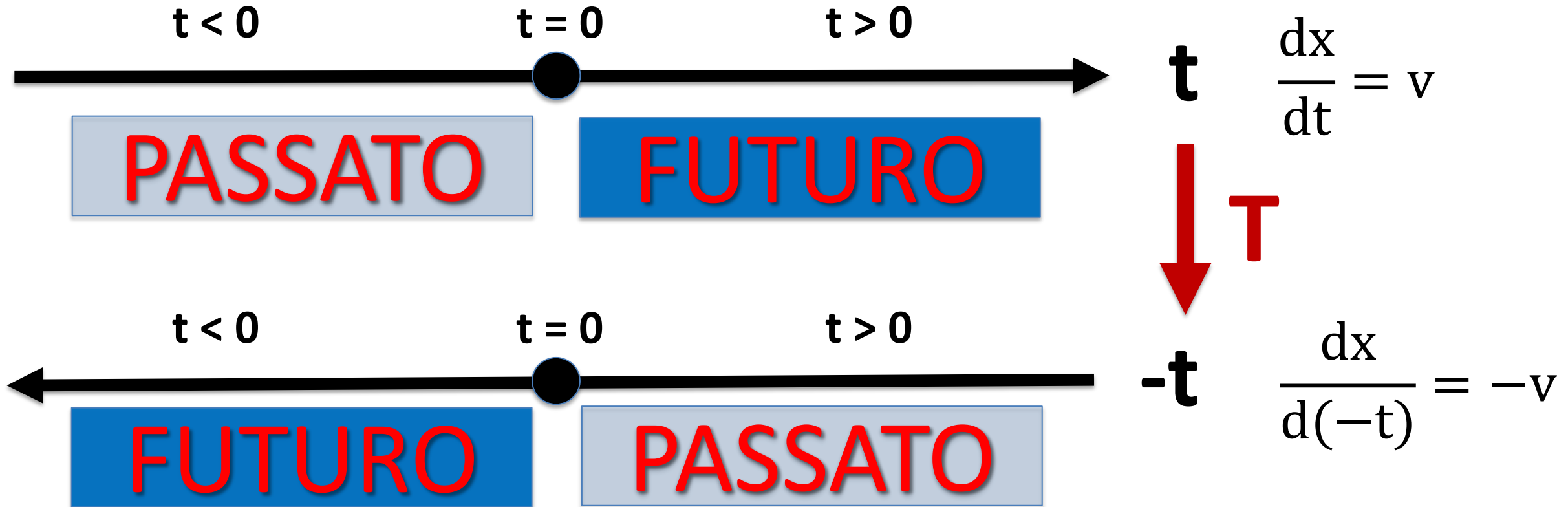
2. E' *oggettiva* la distinzione Passato\Futuro?

Inversione Temporale e Leggi Dinamiche



Simmetria rispetto a T = Leggi dinamiche hanno la stessa forma per t e per $-t$

Simmetria Temporale: Dinamica classica

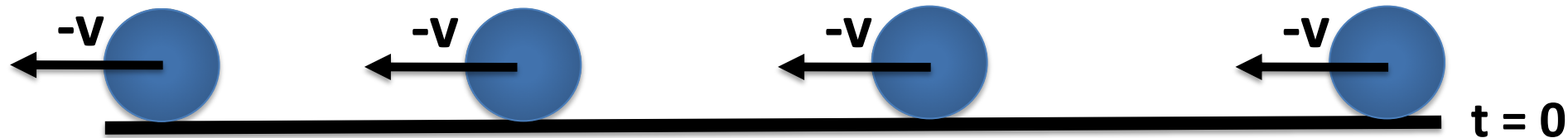


Leggi classiche del moto simmetriche rispetto a T : soluzioni sia per t che per $-t$
→ Non distinguono il verso del tempo!

Simmetria T: moto uniforme



Possibile



Possibile

Qual è il processo originale e qual è la versione a ritroso?

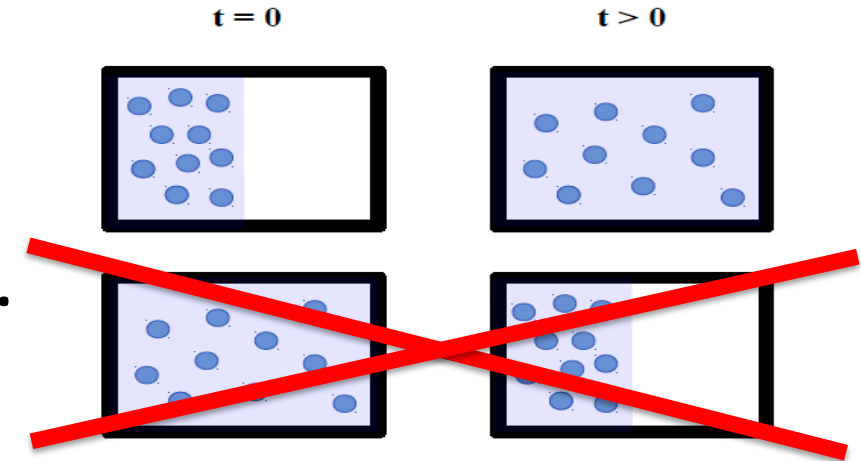
Problema della Freccia del Tempo

LIVELLO MACROSCOPICO

Irreversibilità termodinamica

Aumento di entropia di un gas isolato in espansione libera.

Evoluzione temporale: Passato $\rightarrow$ Futuro

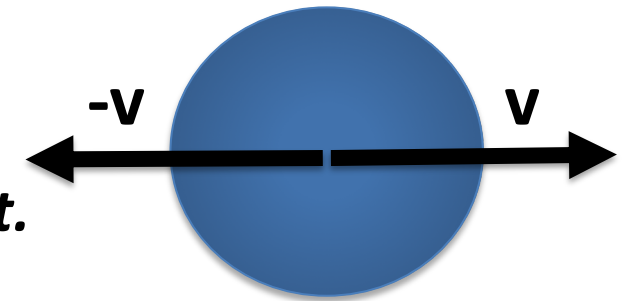


LIVELLO MICROSCOPICO

Simmetria T

Leggi dinamiche delle molecole nel gas simmetriche rispetto a t .

Evoluzione temporale: Possibile in entrambi i versi.



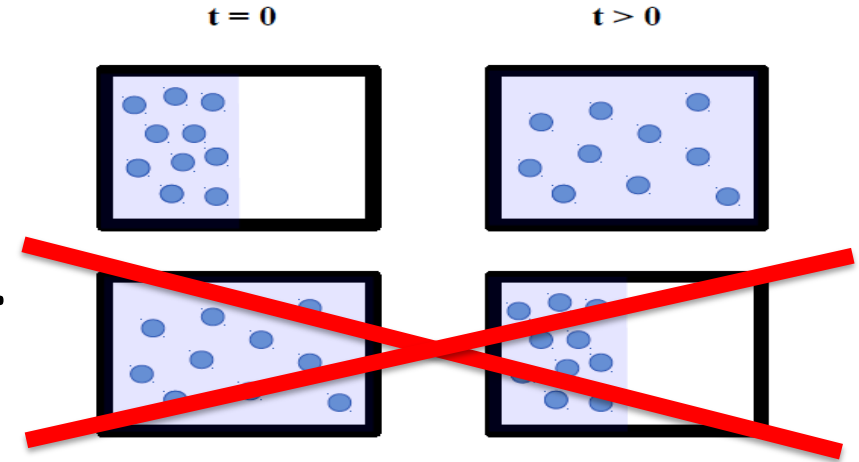
Problema della Freccia del Tempo

LIVELLO MACROSCOPICO

Irreversibilità termodinamica

Aumento di entropia di un gas isolato in espansione libera.

Evoluzione temporale: Passato $\rightarrow$ Futuro

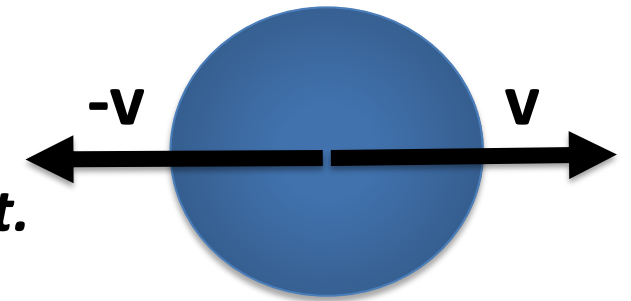
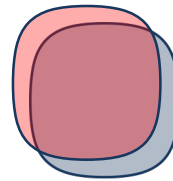


LIVELLO MICROSCOPICO

Simmetria T

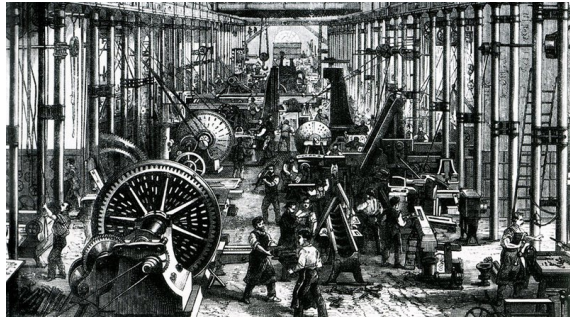
Leggi dinamiche delle molecole nel gas simmetriche rispetto a t .

Evoluzione temporale: Possibile in entrambi i versi.

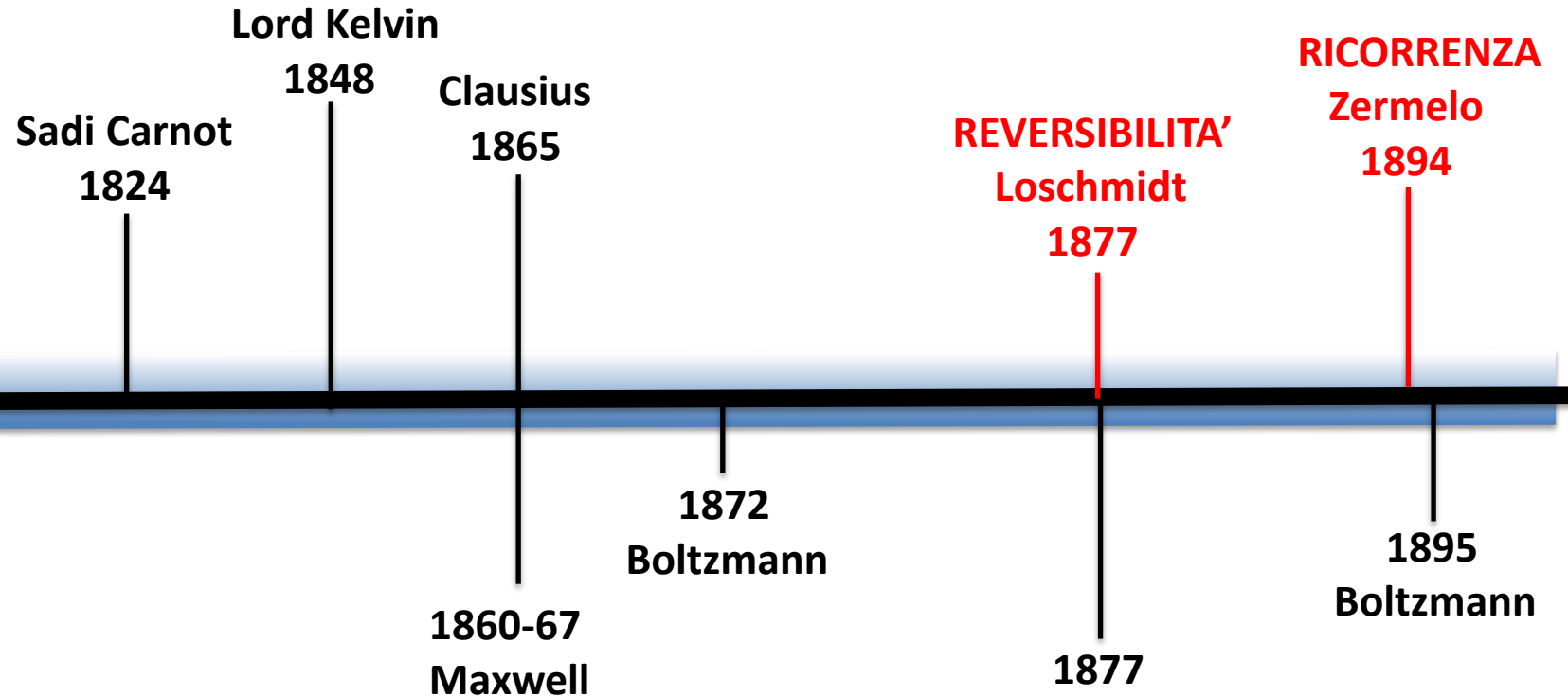


La Freccia del Tempo nella storia della fisica

LIVELLO MACROSCOPICO



TERMODINAMICA CLASSICA

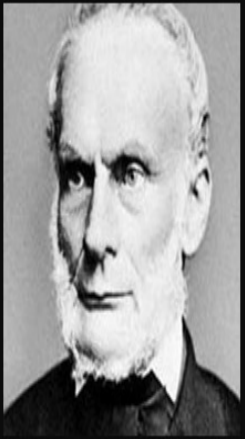


LIVELLO MICROSCOPICO

TEORIA CINETICA DEI GAS

MECCANICA STATISTICA

Clausius (1865): Entropia Termodinamica



The total energy of the universe
is constant; the total entropy is
continually increasing.

~ Rudolf Clausius

AZ QUOTES

Equilibrio Termodinamico: variabili macroscopiche (p , V , T) hanno valori stabili e lo stato del sistema è ben definito.

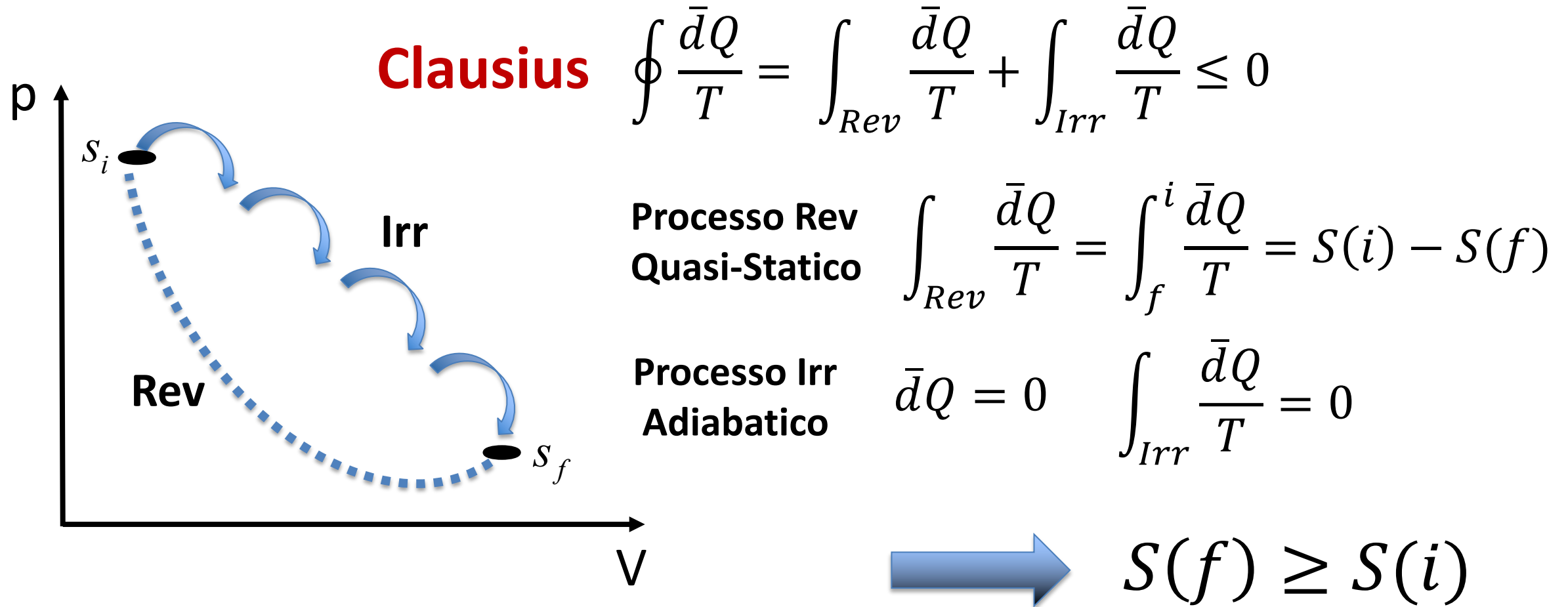
Sistema non in equilibrio non ha uno stato termodinamico

Calore Q non è una sostanza che si conserva, ma una forma di energia che può essere scambiata e trasformata in lavoro.

Entropia S è una funzione di stato con differenziale esatto

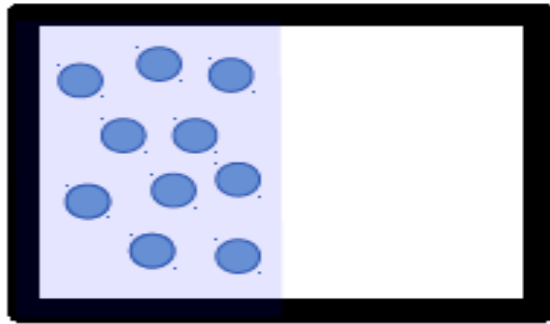
$$dS = \frac{\bar{d}Q}{T}$$

La Seconda Legge

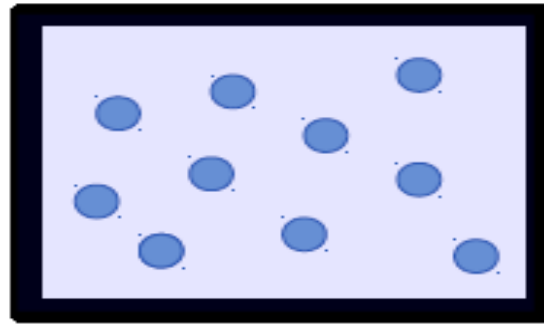


Aumento di Entropia (gas ideale)

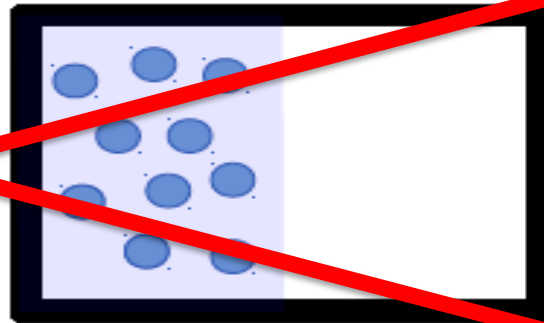
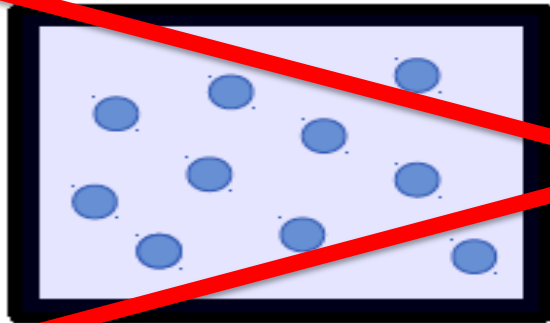
t = 0



t > 0



$$\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i} > 0$$



$$\Delta S < 0$$

Tempo ed Entropia Termodinamica

- Il risultato di Clausius vale solo per processi **adiabatici**. Ma la Seconda Legge mira a descrivere processi più generali in cui il sistema scambia calore e lavoro con l'ambiente esterno.

Come è possibile estendere il concetto di Entropia e la Seconda Legge all'intero **Universo**?

- $S(f) \geq S(i)$ significa che l'**entropia** finale **non può essere inferiore** all'entropia iniziale, ma ciò non implica che l'entropia non possa mai diminuire durante il processo.

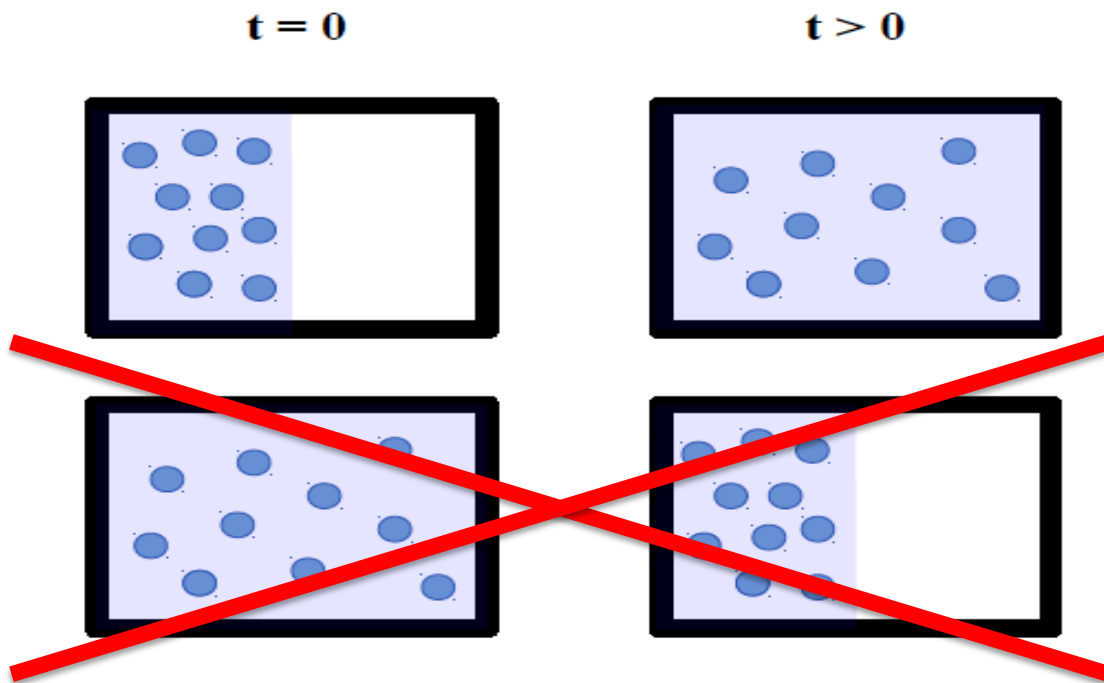
Il tempo non è una variabile t esplicita in termodinamica (no equazioni del moto autonome), quindi la legge **non** può prescrivere un **aumento monotono di entropia** $\frac{dS}{dt} \geq 0$ nel tempo!!!

La violazione della **Simmetria T** (che richiede $t \rightarrow -t$) è solo indiretta.

Origine dell'Irreversibilità Termodinamica

PRINCIPIO DI EQUILIBRAZIONE: un sistema isolato in uno stato di non-equilibrio evolve *spontaneamente* in uno stato di equilibrio, dove poi rimane stabile a meno di disturbi esterni

Asimmetria = Equilibrio stazionario (sistema tende a entrare in equilibrio, ma non ad uscirne)

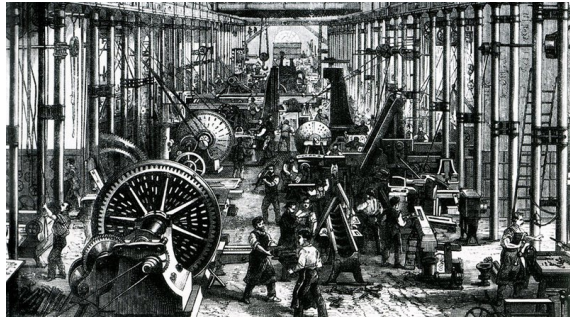


NON-EQ. → EQ.

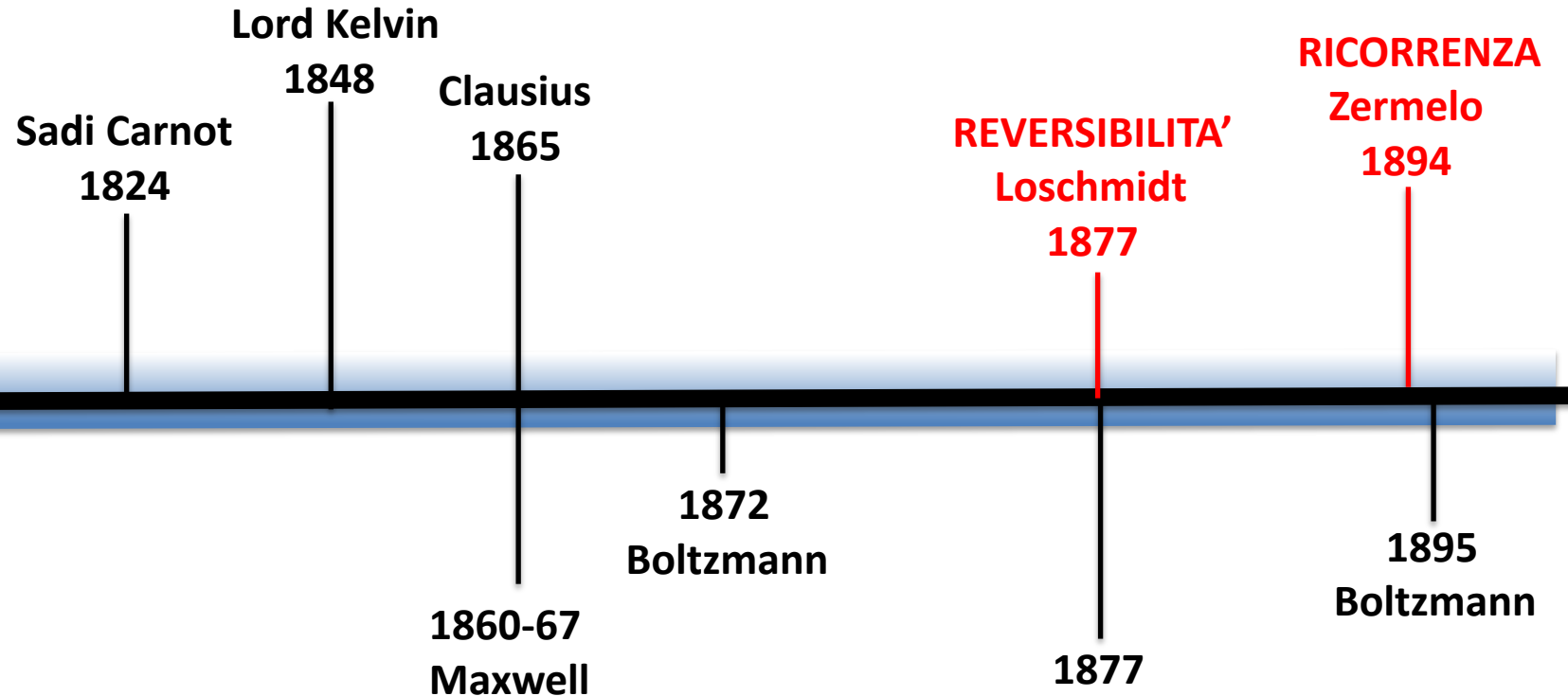
EQ. → NON-EQ

La Freccia del Tempo nella storia della fisica

LIVELLO MACROSCOPICO



TERMODINAMICA CLASSICA



LIVELLO MICROSCOPICO

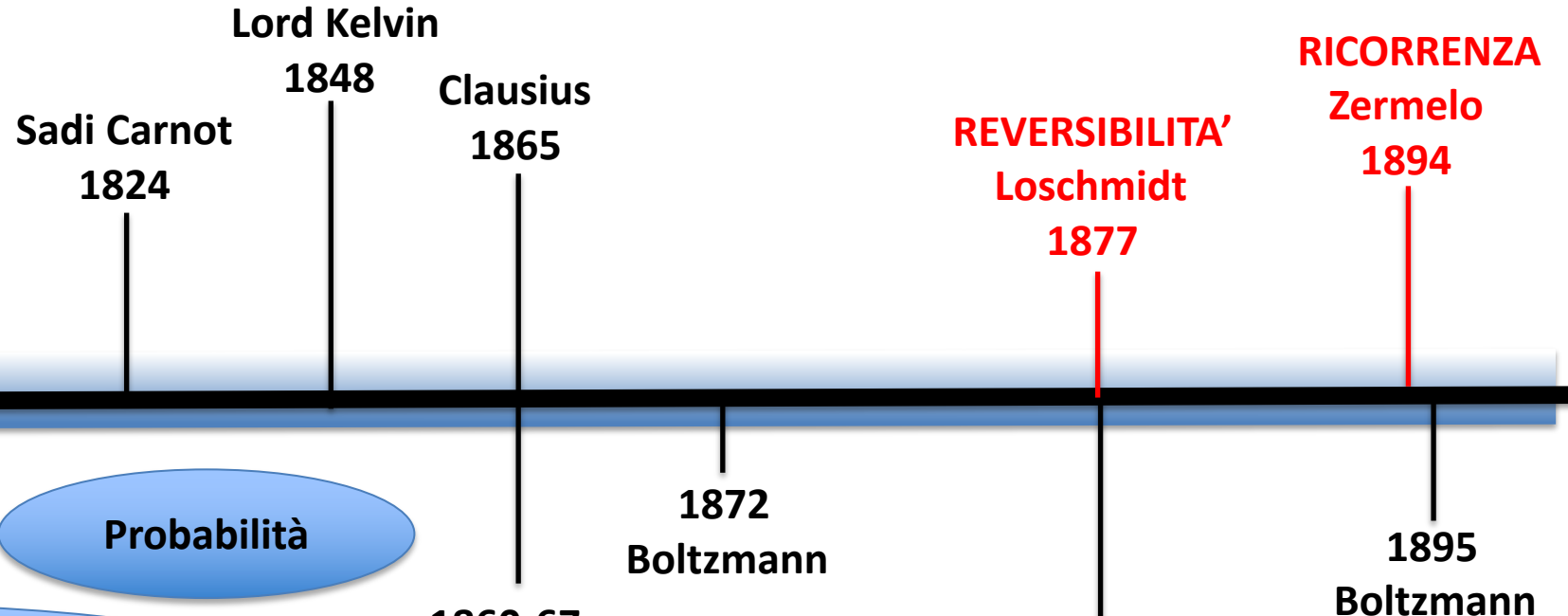
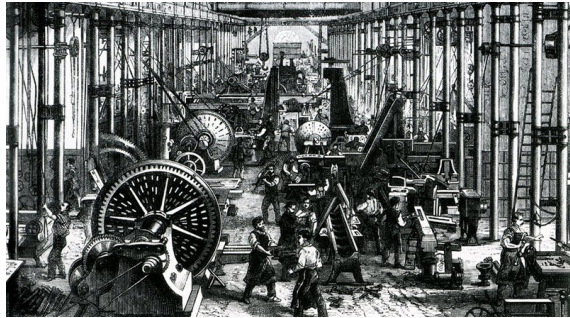
TEORIA CINETICA DEI GAS

MECCANICA STATISTICA

La Freccia del Tempo nella storia della fisica

LIVELLO MACROSCOPICO

TERMODINAMICA CLASSICA



Meccanica
Classica

Probabilità

Ipotesi sulla costituzione
molecolare della materia

LIVELLO MICROSCOPICO

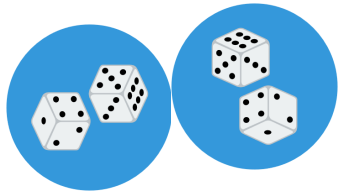
TEORIA CINETICA DEI GAS

MECCANICA STATISTICA

Teoria Cinetica dei Gas

MACROSTATO

Distribuzione
di Probabilità



$$f(\vec{x}, \vec{v}) = f(\vec{v})$$

Gas uniforme
spazialmente

$$f(\vec{v}) d^3\vec{v} = \begin{cases} \bullet \text{ Numero relativo di molecole} \\ \bullet \text{ Tempo relativo di una molecola} \end{cases}$$

MICROSTATO

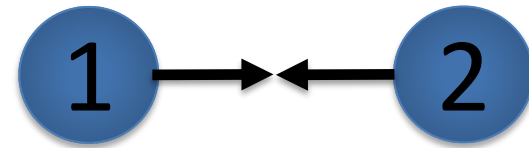
Stato meccanico

Numero molecole

$$(\vec{x}, \vec{v}) \in R^6$$

$$N \gg 0$$

Modello: sfere dure con diametro fisso



Dinamica classica

- Moto rettilineo uniforme
- Collisioni elastiche binarie

Maxwell (1860-1867): Equilibrio

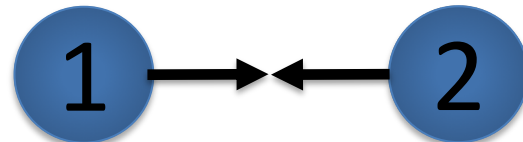


Distribuzione
all'equilibrio

$$f_{max}(\vec{v}) = Ae^{-\frac{|\vec{v}|^2}{B}} \\ = f_{max}(\vec{v}; t) \text{ per tutti i } t$$

Stoßzahlansatz = «Assunzione sul numero di collisioni»

$$N(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \propto N^2 f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2) d^3\vec{v}_1 d^3\vec{v}_2 dt$$

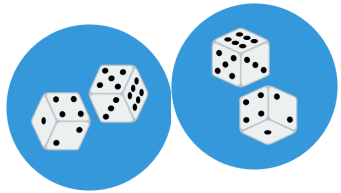


Numero di urti fra molecole con velocità v_1 e v_2 in dt
proporzionale al prodotto fra
numero di molecole con v_1 e numero di molecole con v_2

Evoluzione temporale

MACROSTATO

Distribuzione
di Probabilità



$t = 0$

$$f_0(\vec{V})$$



$t > 0$

$$f_t(\vec{V})$$

**DINAMICA
MACROSCOPICA**

MICROSTATO

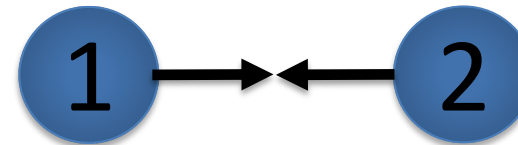
Stato meccanico

Numero molecole

$$(\vec{X}, \vec{V}) \in R^6$$

$$N \gg 0$$

Modello: sfere dure con diametro fisso



Dinamica classica

- Moto rettilineo uniforme
- Collisioni elastiche binarie

Boltzmann (1872): Dinamica Macroscopica



$$\text{NON-EQ. } f_0(\vec{v}) \xrightarrow{t=0 \rightarrow t>0} f_t(\vec{v}) \text{ EQ.}$$

EQUAZIONE DI
BOLTZMANN

$$\frac{d}{dt} f_t = \underbrace{R(f_t, f_t)}_{\text{Moto libero}} + \underbrace{C(f_t, f_t)}_{\text{Collisioni}}$$

Stoßzahlansatz = «Assunzione sul numero di collisioni»

$$\textcircled{1} \longleftrightarrow \textcircled{2} \quad N(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \propto N^2 f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2) d^3\vec{v}_1 d^3\vec{v}_2 dt$$

Boltzmann (1872): Tendenza all'Equilibrio

Entropia - $H(f_t) := \int f_t(\vec{v}) \ln f_t(\vec{v}) d^3\vec{v}$

Teorema H

Se f_t è una soluzione dell'Equazione di Boltzmann con valore iniziale f_0

$$-\frac{dH(f_t)}{dt} \geq 0 \text{ per tutti i } t$$

Aumento monotónico di Entropia
NON-EQ. $\rightarrow$ EQ.

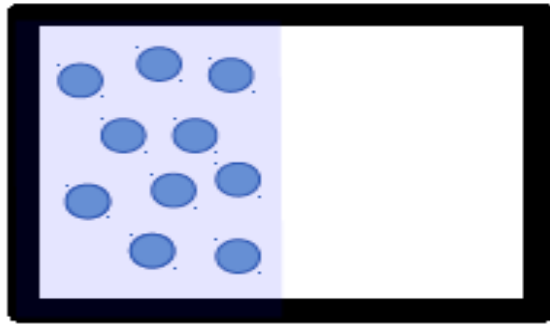
$$-\frac{dH(f_t)}{dt} = 0 \text{ se e solo se } f = f_{max}$$

Equilibrio stazionario (e unico)
~~EQ. $\rightarrow$ NON-EQ.~~

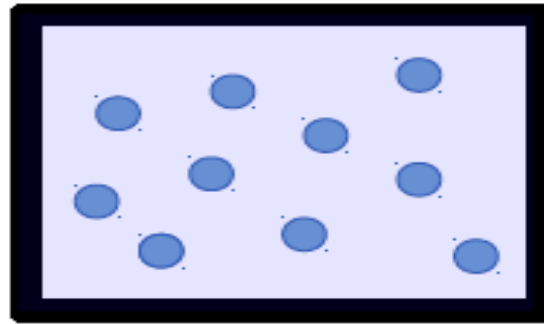
«Questo dà una dimostrazione analitica della Seconda Legge in una maniera completamente diversa da quello che è stato provato finora» (Boltzmann, p.345)

Non-equilibrio e Aumento *monotonico* di Entropia

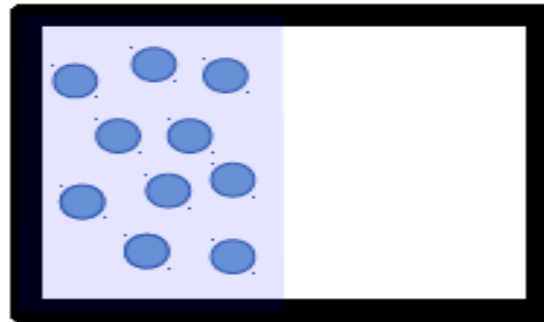
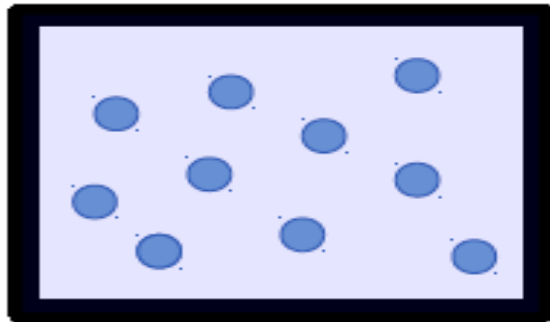
$t = 0$



$t > 0$

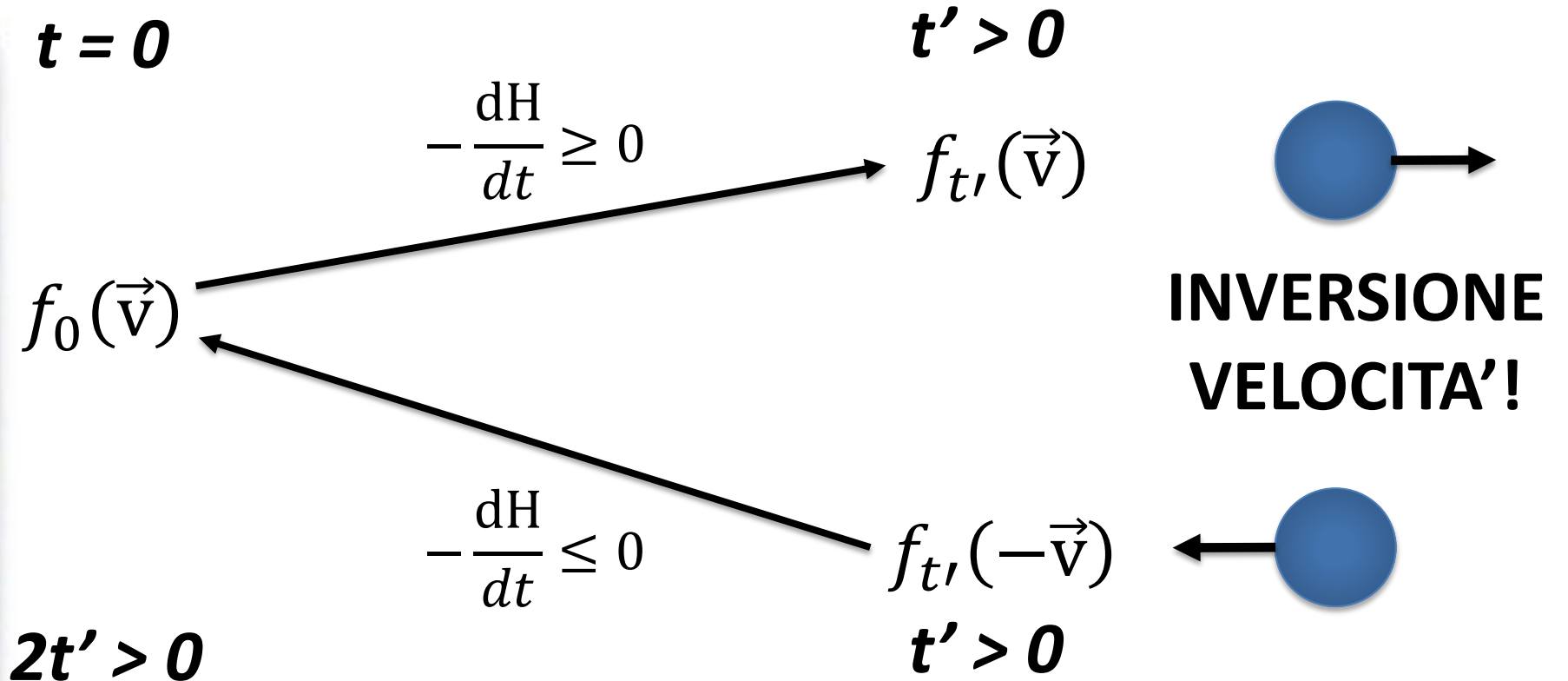


$$-\frac{dH(f_t)}{dt} \geq 0$$



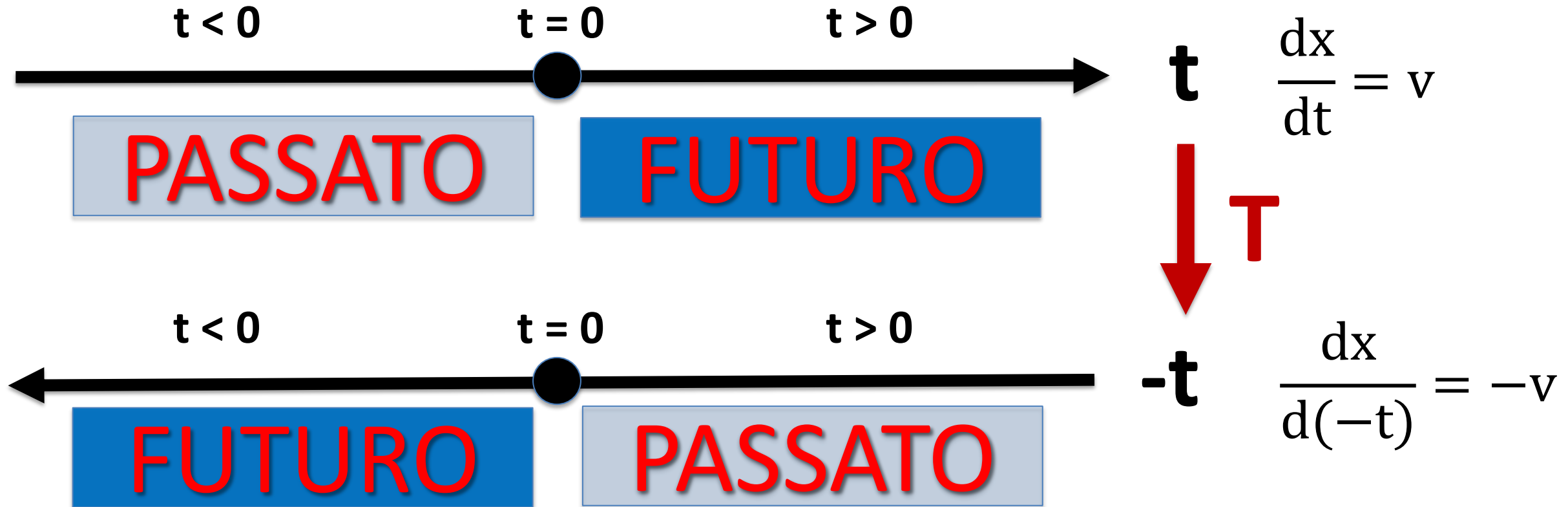
$$-\frac{dH(f_t)}{dt} \leq 0$$

Loschmidt (1877): Obiezione di Reversibilità



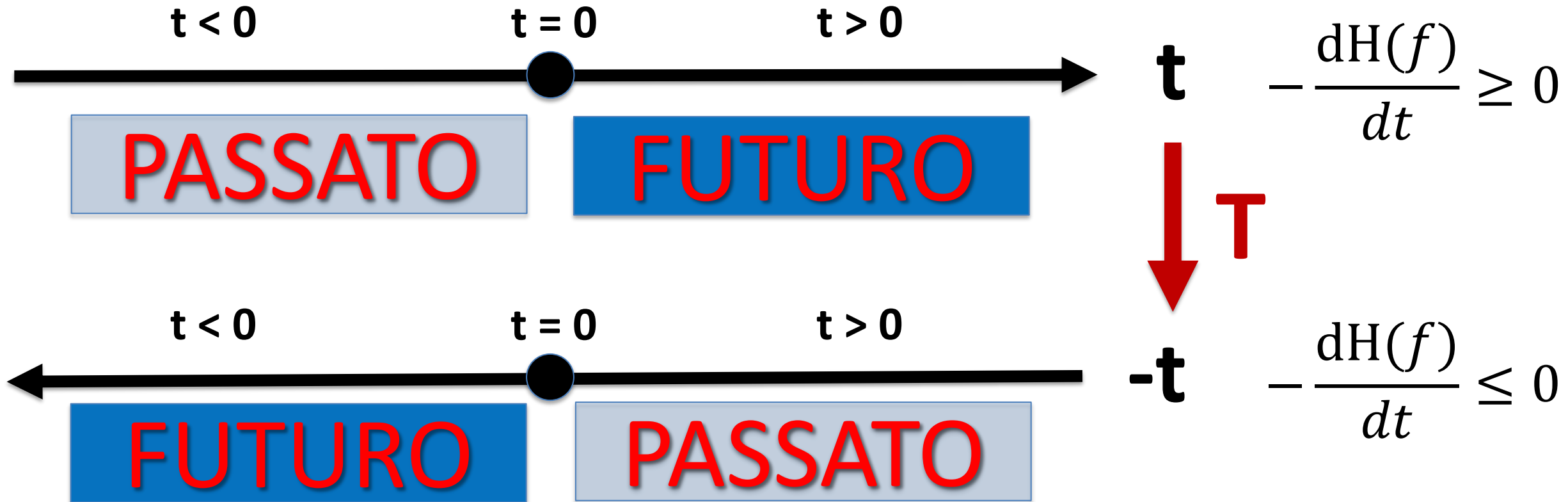
Esistono stati possibili per cui l'entropia diminuisce!

Microstato: Simmetria Temporale



Velocità cambia segno con il tempo!

Macrostatato: Asimmetria Temporale



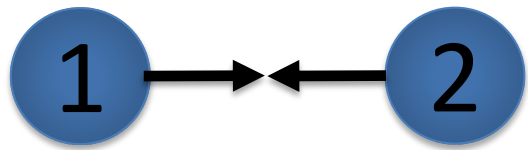
Entropia invariante rispetto alla simmetria T , ma non il suo gradiente!

«Will anyone say exactly what the H-theorem means?»

Nel 1894 un dibattito aperto su *Nature* tentava ancora di capire il teorema H .

Problema di identificare e *giustificare* la condizione asimmetrica necessaria per derivare un'equazione irreversibile (Boltzmann) dalla microdinamica reversibile

Stoßzahlansatz



$$N(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \propto$$

Numero di urti

numero di



$$d^3\vec{v}_1 d^3\vec{v}_2 dt$$

velocità v_1 e v_2 nell'intervallo dt
e al prodotto fra

numero di molecole con v_2

Asimmetria: ipotesi valida solo **prima** dell'urto, ma **non dopo**.

Boltzmann (1877)



Boltzmann ammette che il Teorema H non è valido per tutti i possibili microstati iniziali: ci sono eccezioni.

Tuttavia, tali eccezioni hanno *bassissima probabilità*, e quindi sono praticamente impossibili!

TEORIA CINETICA
DEI GAS



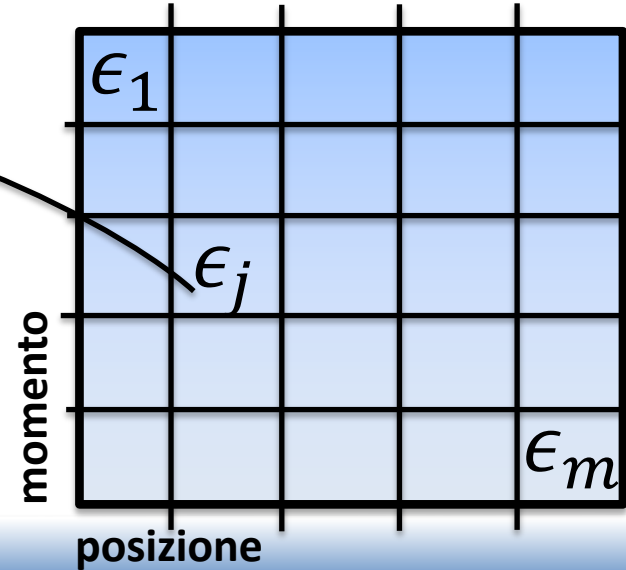
MECCANICA
STATISTICA

Meccanica Statistica

MACROSTATO

n_j = numero di molecole nella cella ω_j

$$Z(x) := (n_1, \dots, n_m)$$



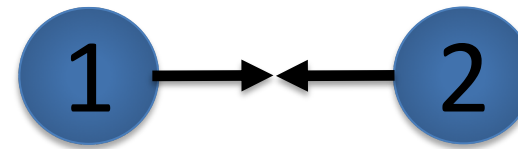
Spazio delle fasi
molecola singola

MICROSTATO

$$x = (\vec{x}_i, \vec{p}_i) \in R^{6N}$$

Numero molecole $i = 1, \dots, N$

Modello: sfere dure con diametro fisso



Dinamica Hamiltoniana

- Moto rettilineo uniforme
- Collisioni elastiche binarie

Entropia di Boltzmann

Ciascun microstato x ha la stessa probabilità (misura di Lebesgue)

Molti microstati x realizzano un dato *macrostato* $Z_0 := (n_1, \dots, n_m)$, invariante per permutazioni delle molecole, che corrisponde a una *regione* dello spazio delle fasi

$$A_{Z_0} = \{x \mid Z(x) = Z_0\}$$

Probabilità : Volume $|A_{Z_0}|$ della regione corrispondente a Z_0

**ENTROPIA DI
BOLTZMANN**

$$S(Z(x)) = k \ln |A_z|$$

$k =$ **Costante di Boltzmann**

Tendenza all'Equilibrio?

Equilibrio : Per N molto grande, la distribuzione uniforme $Z_{eq} = (n, \dots, n)$ approssima la versione discreta della distribuzione di Maxwell

La regione di Z_{eq} è di gran lunga più vasta delle regioni degli altri macrostati.

Equilibrio = Massima Entropia = *Disordine*

Per Boltzmann ciò garantisce che il sistema non-equilibrio evolva nella regione



che un microstato x di non-equilibrio resti per lunghissimo tempo.

Il sistema può oscillare dentro e fuori dalla regione di equilibrio come varia l'entropia S rispetto al tempo t →

no. E Boltzmann non dimostra l'Argomento incompleto !!!

Zermelo (1894): Obiezione di Ricorrenza



Teorema di Poincaré in meccanica Hamiltoniana implica che, se lo spazio delle fasi è limitato, un sistema dinamico si ritroverà arbitrariamente vicino al suo stato iniziale dopo un intervallo di tempo t sufficientemente lungo.

Zermelo ne conclude che, se il sistema evolve con un *aumento di entropia* per un certo periodo, dopo un tempo sufficientemente lungo (anche se astronomico) il sistema, riavvicinandosi allo stato iniziale, dovrà necessariamente subire una *diminuzione di entropia* !!!

Boltzmann (1895): Curva $-H$

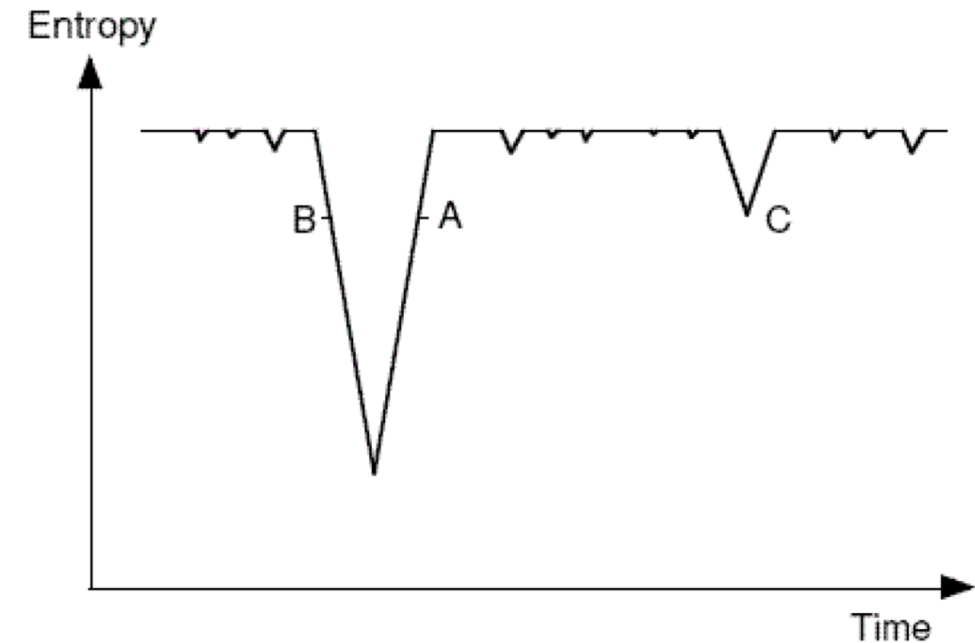


Figure 1. Boltzmann's entropy curve.

(a) Per la maggior parte del tempo t ,
 $-H(t)$ rimane vicino al suo massimo $-H(max)$

(b) Occasionalmente, ma raramente,
 $-H(t)$ scende verso un minimo locale

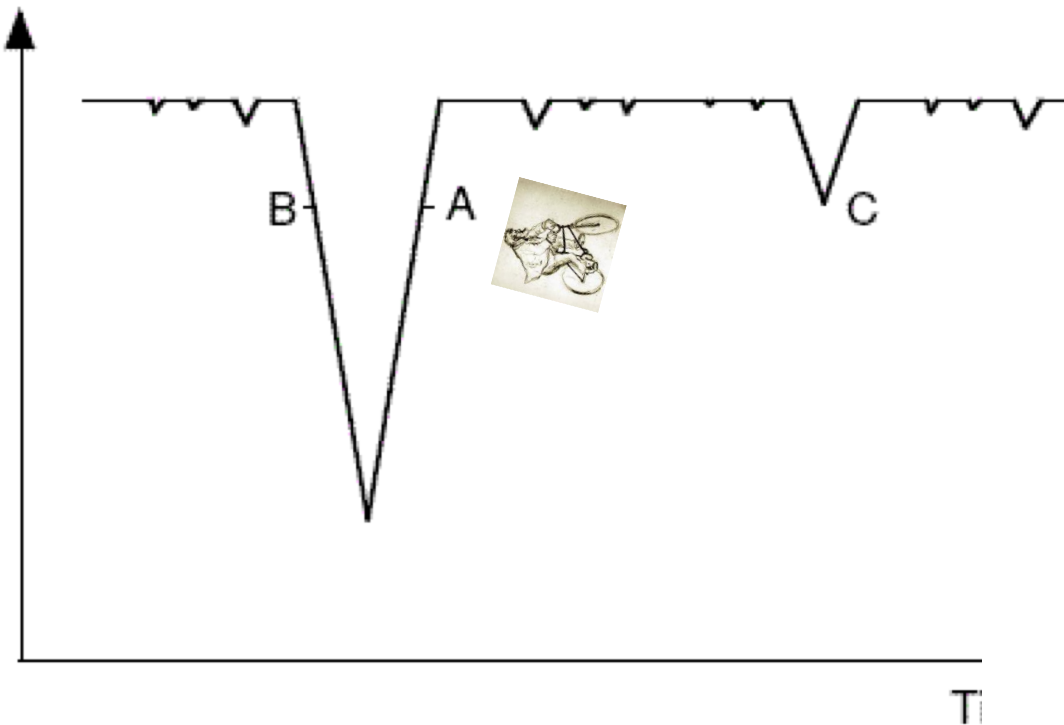


i più bassi hanno una probabilità
minimi locali più alti

Per Boltzmann la curva $-H$ rappresenta l'entropia dell'intero *Universo* nel tempo. Tuttavia, Boltzmann non fornisce alcuna dimostrazione di (a) e (b)!

Dove (o quando) ci troviamo?

Entropy



**Ipotesi di Bassa
Entropia del Passato**

Entr
era

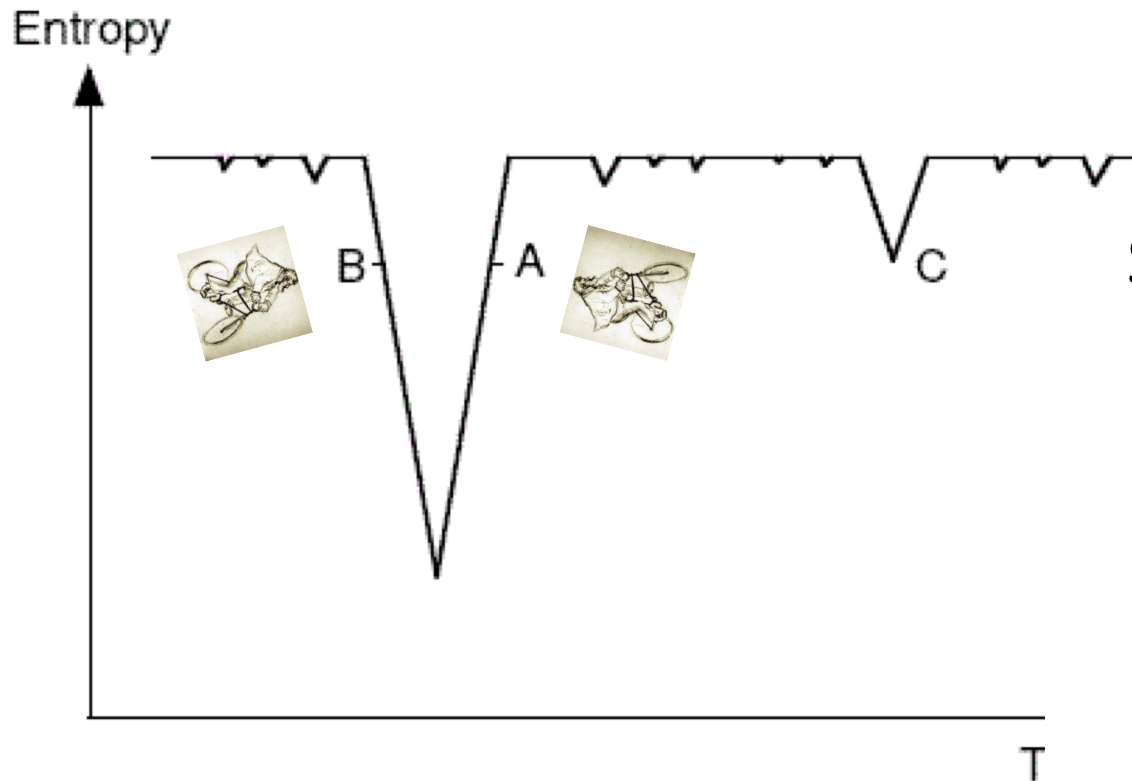


Per Boltzmann l'Universo è nello **stato A**:

Entropia cresce nel futuro (predizioni corrette)
e cresce nel passato (retrodizioni corrette)

Universo nel lontano passato (Big Bang)
bassa. → Bassa Probabilità!

Distinzione soggettiva



Se fossimo nello Stato B percepiremmo l'entropia orientata verso la diminuzione di

Stato A e Stato B hanno la stessa probabilità:
Perché l'Universo **non** si trova nello **Stato B**?



zione Passato\Futuro
non-oggettività della Freccia!

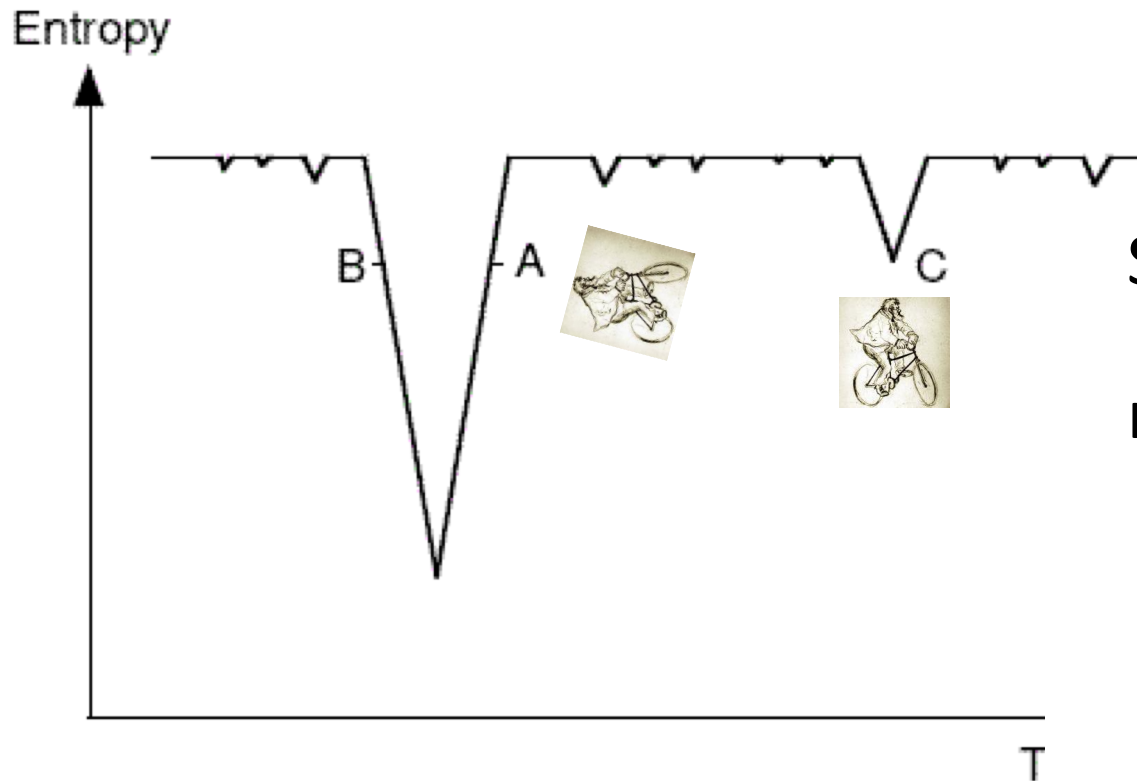
Analogia Spaziale: Sopra\Sotto

«Per l'universo, i due versi del tempo sono indistinguibili, proprio come nello spazio non c'è un sopra e un sotto» (Boltzmann 1895)



- Distinzione Sopra\Sotto è definita dal verso della gravità, ma non è assoluta: cambia sempre per ciascun osservatore
- Distinzione Passato\Futuro dipende dalla nostra orientazione: per noi, futuro verso l'aumento di entropia

Retrodizioni e memoria passata



Stato A e Stato C hanno la stessa probabilità,
ma **Passato** dello **Stato C** più **probabile**!

Le retrodizioni dallo Stato A, anche se sono meno probabili di quelle dallo Stato C

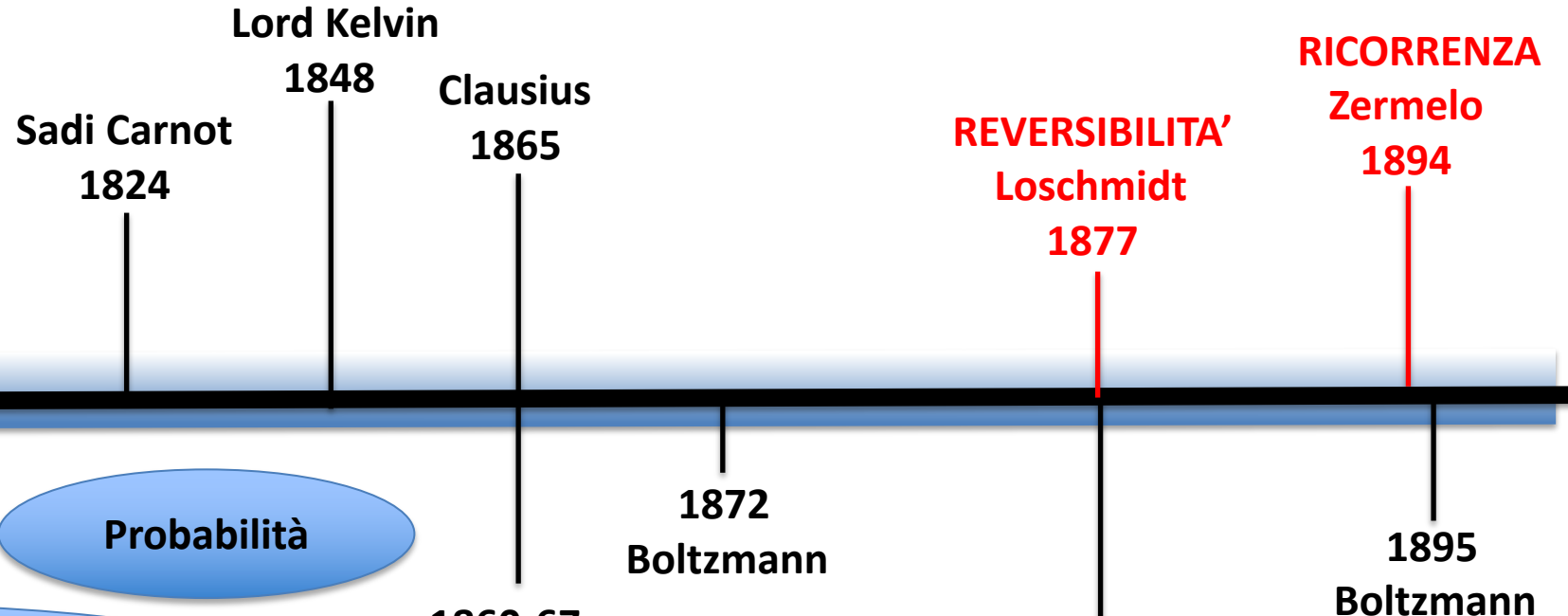
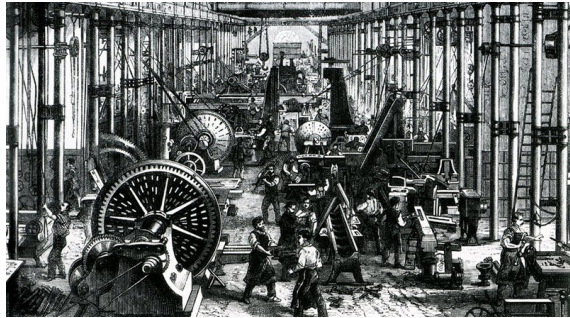


(aumento entropia), sono meno probabili di quelle dallo Stato C
ed evidenza passata inaffidabili!

La Freccia del Tempo nella storia della fisica

LIVELLO MACROSCOPICO

TERMODINAMICA CLASSICA



Meccanica
Classica

Probabilità

Ipotesi sulla costituzione
molecolare della materia

1860-67
Maxwell

1877
Boltzmann

1895
Boltzmann

LIVELLO MICROSCOPICO

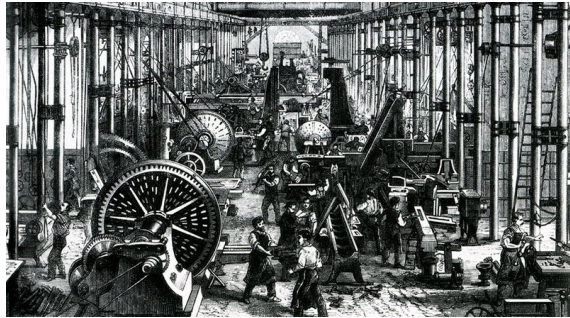
TEORIA CINETICA DEI GAS

MECCANICA STATISTICA

La Freccia del Tempo nella storia della fisica

LIVELLO MACROSCOPICO

TERMODINAMICA CLASSICA



Sadi Carnot
1824

Lord Kelvin
1848

Clausius
1865

REVERSIBILITA'
Loschmidt
1877

RICORRENZA
Zermelo
1894

Meccanica
Classica

Probabilità

Ipotesi sulla costituzione
molecolare della materia

1872
Boltzmann

1860-67
Maxwell

1877
Boltzmann

1895
Boltzmann

1928
Eddington

LIVELLO MICROSCOPICO

TEORIA CINETICA DEI GAS

MECCANICA STATISTICA

Freccia del Tempo dopo Boltzmann: problema aperto

Meccanica Statistica Boltzmanniana: validità statistica dell'equazione di Boltzmann nel limite di Boltzmann-Grad (Cercignani 1972; Lanford 1975), entropia aumenta $-dH(t)/dt > 0$ fino all'equilibrio; ma: brevissima durata, condizione asimmetrica?

Meccanica Statistica Gibbsiana (Gibbs 1902): equilibrio stazionario, descrizione della fasi termodinamiche; ma: entropia di Gibbs costante $dS(t)/dt = 0$, *ensembles*?

Ergodicità: ipotesi dinamica di Boltzmann (1868) non valida in generale, altre condizioni asimmetriche più deboli (quasi-ergodicità, transitività metrica) possono essere valide per sistemi realistici; ma: giustificazione fisica e concettuale?

Interventismo: dinamica non-deterministica non simmetrica rispetto a T , intervento dell'ambiente esterno; freccia del tempo nell'Universo?, processi spontanei?